Nesta secção concluímos a publicação do texto de Malcolm Swan, cuja primeira parte foi publicada na revista Educação e Matemática temática n.º 144-145.

Conceber tarefas e aulas que desenvolvam a compreensão concetual, a competência estratégica e a consciência crítica[1]

Malcolm Swan

PRINCÍPIOS PARA A CONCEÇÃO DE AULAS A PARTIR DE TAREFAS

Os princípios que norteiam a conceção das tarefas e a realização de aulas têm uma base substancial na investigação teórica e empírica. Este espaço não nos permite enumerá-los todos aqui. São principalmente derivados do construtivismo social: tanto os conceitos como as estratégias são conjuntamente criados como linguagem e os símbolos são apropriados e interiorizados (Bakhtin 1981; Vygotsky, 1996). Os seguintes princípios são, talvez, os mais importantes:

- Usar avaliação formativa; conceber e adaptar as aulas ao conhecimento que os alunos já têm (Black & Harrison, 2002; Black et al, 2003; Black & Wiliam, 1998; Black et al., 1999).
- Desenvolver a linguagem matemática através de atividades de comunicação que incentivem o diálogo (Ahmed 1987; Alexander, 2006; 2008; Mercer, 1995).
- Focar diretamente quaisquer obstáculos concetuais específicos ou processos (Bell, 1993; Wigley, 1994) e criar surpresa, tensão e conflito cognitivo que possam ser abordados através de discussão (Brousseau, 1997).
- Criar conexões entre tópicos, tanto dentro da matemática como entre esta e o mundo real. Utilizar várias representações (Askew, Brown, Rhodes, Johnson & Wiliam, 1997).
- Promover a avaliação de pares, usando tarefas que permitam aos alunos a permuta de papéis, a explicação e o apoio mútuos (Bell, Swan, Crust & Shannon, 1993).
- Utilizar tarefas e questões que promovam a explicação, a aplicação e a síntese, ao contrário de apenas recorrerem à memória (Bills et al, 2004; Watson & Mason, 1998).

No entanto, os princípios não são suficientes. Também devem ser acompanhados por uma compreensão do contexto para o qual são planificados, tendência criativa e visão profissional (Schoenfeld, 2009).

CONCEÇÃO DE AULAS A PARTIR DE TAREFAS: ALGUNS EXEMPLOS

A conceção de uma aula envolve a sequenciação de tarefas matemáticas de forma a conseguir cativar tanto os alunos, como chamar a sua atenção para determinados conceitos ou estratégias. Planificar o desenvolvimento de uma aula é bastante parecido com a tarefa do guionista quando descreve a ação de um filme. Segundo Trottier (1998), o roteiro típico de um filme está estruturado em três fases. Existe uma fase inicial de preparação, na qual são apresentadas as personagens, os seus relacionamentos e os seus mundos e se coloca a questão ou situação dramática. Depois, há o confronto com um obstáculo. As personagens devem aprender novas competências e trabalhar colaborativamente para lidar com a sua difícil situação. Muitas vezes falham o objetivo, a tensão sobe e atinge-se o clímax da crise. Finalmente, há a fase de resolução que inclui um pico, um desenlace e, talvez, até mesmo uma reviravolta. O terreno comum com a conceção da aula é evidente.

A minha própria conceção de aulas foi influenciada pelo processo demonstrado no estudo da aula japonesa (Fernandez & Yoshida 2004; Shimizu 1999). Estas aulas são frequentemente estruturadas com quatro componentes chave: *hatsumon* (o professor apresenta à turma um problema para iniciar a discussão); *Kikan-shido* (os alunos resolvem o problema em grupos ou individualmente); *neriage* (uma discussão a nível de toda a turma em que se comparam e contrastam estratégias alternativas e na qual se pretende chegar a um consenso) e finalmente o *matome* ou resumo. Entre as diversas fases, a parte de *neriage* é considerada a mais crucial. O termo refere-se a amassar ou polir em cerâmica, onde argilas de diferentes cores são misturadas, servindo como metáfora para a consideração da combinação de interpretações e abordagens utilizadas pelos alunos na resolução de um problema de matemática. Na fase de *matome*, os professores japoneses costumam fazer uma cuidadosa observação final sobre a sofisticação matemática das abordagens utilizadas. Contudo, verificámos que a utilização deste modelo acarreta enormes exigências aos professores, particularmente quando tentam interpretar, selecionar e discutir detalhadamente o raciocínio dos alunos.

Em 2009, a Fundação Bill e Melinda Gates contactou o centro de investigação em Nottingham, para desenvolver um conjunto de cem aulas que seriam um elemento essencial no programa da Fundação "College and Career Ready Mathematics", que se apoia nos "Common Core State Standards for Mathematics" (NGA & CCSSO, 2010). Em resposta, foi criado o "Mathematics Assessment Project" (MAP) para se perceber em que grau o material didático pode habilitar os professores a implementar os princípios que descrevemos, aliados às tarefas de qualidade, parte integral do currículo implementado nas suas aulas, mesmo nos casos em que o apoio ao desenvolvimento profissional é limitado ou inexistente. A conceção dessas aulas apoiou-se em resultados da investigação e permitiu a publicação dos "*Classroom Challenges*", descritos noutro lugar (Swan & Burkhardt, 2014). Neste artigo, vou sublinhar com brevidade a sua estrutura e ilustrar como o quadro anteriormente descrito foi utilizado na sua conceção. Amostras de aulas podem ser descarregadas em http://map.mathshell.org.

Dentro do projeto MAP, criámos dois tipos de aulas: aulas de desenvolvimento de conceitos (orientadas para os objetivos[1] 2 e 4) e aulas de resolução de problemas (dirigidas aos objetivos 3 e 4). Decidimos, desde o início, que estes dois tipos de aulas necessitavam ser mantidos em separado, pelas razões antes discutidas. A estrutura destas aulas é semelhante, com um claro foco na avaliação formativa. Vamos agora evidenciar a estrutura geral de aulas típicas de desenvolvimento concetual e de resolução de problemas dos "*Classroom Challenges*" e considerar como os princípios acima referidos são realizados dentro desses desafios.

A conceção das aulas de desenvolvimento concetual tem sido fortemente orientada por princípios que se têm revelado eficazes na nossa investigação anterior (Swan, 2006). Cada aula é precedida por uma avaliação diagnóstico curta, concebida para descobrir os entendimentos e interpretações atuais dos alunos. Damos aos professores alguma orientação sobre o que pode ser a avaliação diagnóstico, no sentido de auxiliar o professor na preparação de perguntas de exploração que podem ser usadas na própria aula. A aula, em geral, segue o contorno descrito a seguir. O leitor encontrará uma explicação completa da aula relacionada com a tarefa da "Representar e traduzir: aumento e redução percentual" (publicado na EM nº 144 -145), no sítio do MAP[2]. O espaço não nos permite reproduzir todos os detalhes aqui.

1. ***Explicite os conceitos e os métodos em jogo na aula.*** Propõe-se uma tarefa inicial com o propósito de fazer com que os alunos se apercebam das suas próprias interpretações intuitivas, para que surja curiosidade e seja esboçado o nível de raciocínio que se espera conseguir durante a atividade principal. Assim, por exemplo, o professor apresenta a tarefa ilustrada na figura 11 e pede aos alunos que selecionem a história que melhor se ajuste ao gráfico. Geralmente, o resultado é a circulação de opiniões dos alunos, com a maioria a optar pela hipótese B. O professor pede e analisa as explicações e assinala no diagrama essas escolhas, mas não corrige os alunos, nem tenta que a solução seja descoberta, nesta altura.

2. ***Atividade colaborativa: correspondência entre gráficos, histórias e tabelas***. Cada grupo de alunos recebe um conjunto de cartões, como o mostrado na figura 12. Dez gráficos de distância/tempo devem ser associados a nove 'histórias' (a décima será escrita pelos alunos). Posteriormente, quando os cartões forem discutidos e associados, o professor distribui um conjunto adicional de cartões que contêm tabelas de distância/tempo com dados numéricos. Esses cartões permitirão que os alunos verifiquem as suas respostas e reconsiderem as decisões tomadas. Os alunos farão cartazes para revelar o seu raciocínio.

3. ***Discussão entre grupos: comparar interpretações.*** Os cartazes dos alunos são exibidos, e eles observam e verificam cada um dos cartazes dos outros grupos, pedindo explicações para correspondências que parecem não estar corretas. Nesta fase, portanto, sublinha-se a avaliação entre pares.

4. ***Discussão plenária.*** Os alunos retomam a tarefa que foi introduzida no início da aula, cuja resolução é agora pedida. Baseando-se em exemplos dos alunos, elaborados durante a aula, o professor chama a atenção para os conceitos significativos que surgiram (e.g., a conexão entre velocidade, declives nos gráficos e as diferenças com as tabelas). Colocam-se questões adicionais para verificar a aprendizagem, usando pequenos quadros em branco. "Mostrem um gráfico de tempo/distância para esta história"; "Mostrem uma história para este gráfico"; "Mostrem uma tabela que se encaixe neste gráfico"; e assim por diante.

5. ***Trabalho individual: melhorar as soluções para a tarefa introdutória.*** Os alunos agora retomam o trabalho que fizeram na tarefa introdutória, descrevem o que responderiam de maneira diferente e escrevem sobre o que aprenderam.

A estrutura da aula acima descrita contém muitas das características do 'ensino diagnóstico' (ver, por exemplo, Bell, 1993; Swan, 2006) que a nossa investigação anterior mostrou

1 Estes objetivos são apresentados na 1.º parte do texto.

1º Objetivo: Desenvolver o conhecimento factual e a fluência processual

2º Objetivo: Desenvolvimento da compreensão concetual; 3º Objetivo: Competência estratégica; 4º Objetivo: Competência crítica

2 http://map.mathshell.org.uk/materials/lessons.php?taskid=208&subpage=concept

Associar um gráfico com uma história

A. O Tom levou o seu cão a passear no parque. Começou a andar devagar e depois aumentou o ritmo de passada. No parque, inverteu a marcha e caminhou calmamente para casa.

B. Desde a sua casa, o Tom pedalou na sua bicicleta em direção a leste, subindo uma encosta íngreme. Ao fim de algum tempo a inclinação diminuiu. Desceu depois a encosta oposta, desde o cume até casa.

C. O Tom foi correr. No final da rua deu com um amigo e abrandou o ritmo. Quando se separou do amigo, andou rapidamente em direção a casa.

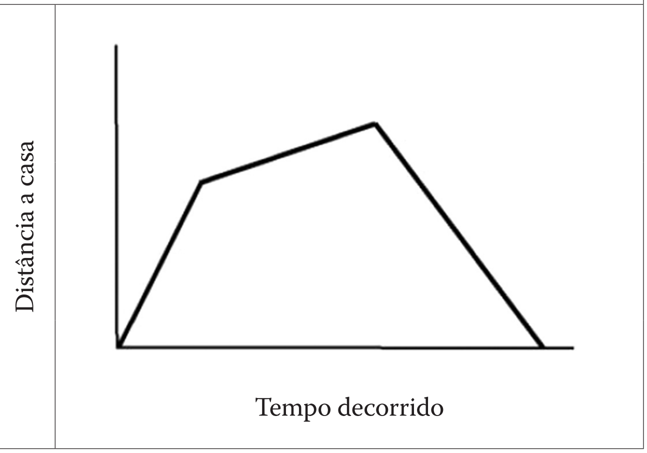


Figura 11. Atividade introdutória: Interpretar gráficos de distância/tempo.

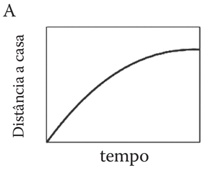
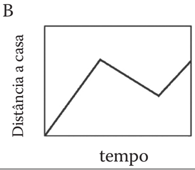
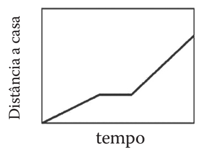
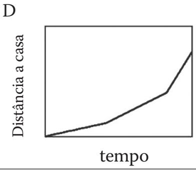
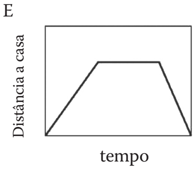
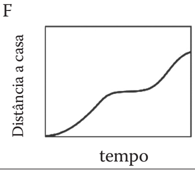
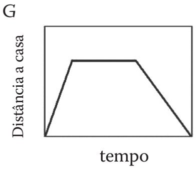
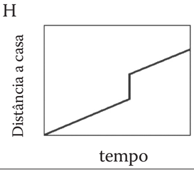
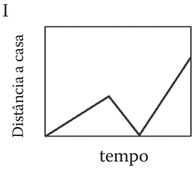
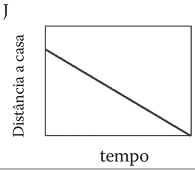
A 	B 	1. O Tom correu de casa até à paragem do autocarro e esperou. Percebeu que tinha perdido o autocarro e regressou a casa.	2. À frente da casa do Tom está uma colina. O Tom subiu lentamente a encosta, atravessou o cume e desceu a correr a encosta oposta.
C 	D 	3. 3 O Tom partiu de casa na prancha de skate e foi aumentando a velocidade. Diminuiu a velocidade de modo a poder evitar o piso irregular, tendo acelerado depois.	4. O Tom andou devagar e parou para ver as horas no relógio. Percebeu que estava atrasado e começou a correr
E 	F 	5. O Tom saiu de casa para correr mas, como estava em baixo de forma, foi andando mais devagar, até que parou	6. O Tom caminhou até à loja que estava no extremo da rua. Comprou o jornal e fez o percurso de volta a correr.
G 	H 	7. O Tom foi dar um passeio com amigos. Lembrou-se de repente que tinha deixado a carteira em casa. Correu para a ir buscar e depois teve de correr para alcançar os outros.	8. Este gráfico está completamente errado. Como é que o Tom pode estar simultaneamente em dois sítios?
I 	J 	9. Depois da festa, o Tom andou com calma para casa	10. Escreve uma história feita por ti.

Figura 12. Correspondência de cartões: gráficos e histórias

ser mais eficaz, a longo prazo, do que qualquer das outras abordagens, exposição ou descoberta guiada, acontecendo o mesmo em diversos temas: valor decimal de posição, razões, transformações por reflexão, funções e gráficos e números racionais (Bassford, 1988; Birks, 1987; Brekke, 1987; Onslow, 1986; Swan, 1983). Estes estudos permitiram concluir que o valor do ensino diagnóstico parece estar ligado à valorização dos métodos intuitivos e das ideias que os alunos traziam para cada aula, proporcionando experiências que despoletaram 'conflitos' de ideias, tanto a nível individual como em relação aos colegas, e criou oportunidades para os alunos refletirem e analisarem as inconsistências das suas interpretações.

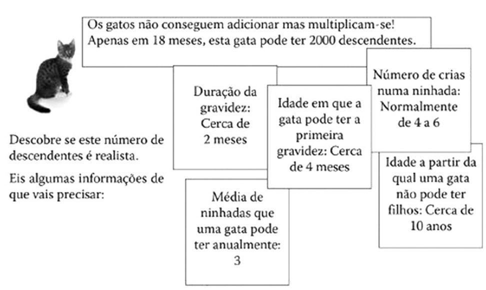
Vou agora ilustrar um dos desafios da sala de aula, focado na resolução de problemas: "Ter gatinhos"[3]. Como já foi assinalado, os professores acham que é muito difícil interpretar, monitorar e selecionar o extenso raciocínio dos alunos durante uma aula de resolução de problemas. Foi por isso que resolvemos preceder cada aula com uma avaliação preliminar, em que os alunos resolvem o problema individualmente. O professor analisa uma amostra das tentativas iniciais dos alunos e identifica as principais questões que precisam de ser abordadas na aula. Através dessa testagem anterior, desenvolvemos uma tabela de problemas "comuns" que alerta os professores para as dificuldades que os alunos possam ter e indica as perguntas que o professor poderá colocar para potenciar um pensamento mais frutuoso (figura 13). Os professores analisam as respostas iniciais dos alunos, com a ajuda dessa tabela. Se o tempo permitir, podem escrever questões de retorno sobre o trabalho de cada aluno ou, alternativamente, preparar perguntas para serem consideradas por toda a turma.

Problema	Sugestões para perguntas
Tem dificuldade em começar	Consegues descrever o que acontece nos primeiros cinco meses?
Não consegue desenvolver uma representação apropriada	Consegues fazer um diagrama ou uma tabela que mostrem o que está a acontecer?
O trabalho não é metódico	Consegues começar olhando apenas para as ninhadas da primeira gata? O que farás a seguir?
Desenvolve um modelo parcelar	Pensas que a primeira ninhada de crias terá tempo para crescer e terem elas próprias ninhadas?
Não formula suposições claras ou razoáveis	Que suposições fizeste? Todos os gatinhos nasceram no início do ano? Todas as crias são fêmeas?
Faz uma tentativa bem sucedida	Como é que podes verificar esta resposta usando outro método?

Figura 13. Um estrato da "Tabela de problemas comuns" da atividade "Ter gatinhos"

3

Ter gatinhos[4]



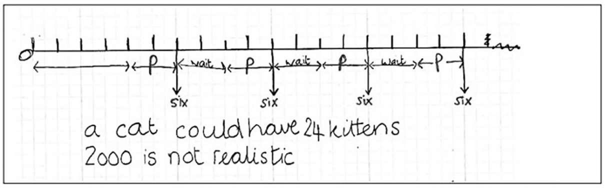
Enunciado da tarefa inserido na primeira parte do texto, publicado na Educação e Matemática nº 144 -145

Esta forma de retorno tem-se vindo a revelar mais poderosa do que a atribuição de classificações ou de notas, que desvalorizam a matemática e que encorajam a competição, e não a colaboração (Black et al. 2003; Black & Wiliam, 1998)

Chegamos agora à própria aula. Enquanto a estrutura rigorosa dependerá do problema específico, as aulas de resolução de problema são geralmente organizadas da seguinte forma:

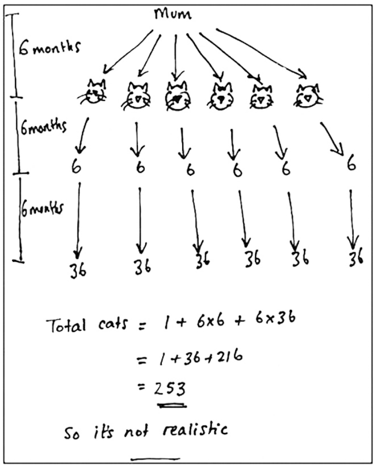
1. ***Introdução***. O professor volta a apresentar a tarefa principal para a aula e devolve o trabalho aos alunos junto com as perguntas formativas. Os alunos têm alguns minutos para lerem essas perguntas e para lhes responder individualmente.
2. ***Trabalho de grupo: comparação das estratégias de abordagem.*** Pede-se aos alunos que trabalhem em pequenos grupos para discutir o trabalho de cada um e para produzir seguidamente um cartaz mostrando uma solução conjunta que seja melhor do que qualquer das tentativas individuais. Os grupos estão organizados de modo a que os alunos com ideias contrastantes fiquem juntos. Esta atividade promove a colaboração e a avaliação entre pares. O papel do professor será o de observar os grupos e desafiar os alunos, usando as perguntas preparadas e assim aperfeiçoarem e melhorarem as estratégias.
3. ***Discussão entre grupos: comparar as estratégias de abordagem***. Dependendo do leque de abordagens utilizadas pelos alunos, o professor, neste momento, pode pedir aos alunos para reverem as estratégias elaboradas por outros grupos da turma e justificar a sua própria (a maioria não terá chegado a uma solução, nesta fase). Se não existirem divergências marcantes nos métodos usados, ou se não é evidente a utilização de representações mais sofisticadas, então o professor pode ir diretamente para a fase seguinte.
4. ***Trabalho de grupo: criticar "exemplos do trabalho dos alunos".*** O professor apresenta no máximo quatro exemplos de "trabalho dos alunos", retirado dos materiais (figura 14). Este trabalho previamente preparado foi selecionado para destacar abordagens alternativas. Cada exemplo está anotado com perguntas que chamem a atenção dos alunos. (por exemplo, "*O que é que cada aluno fez corretamente? Quais os pressupostos*? *Como poderá ser melhorado o seu trabalho?*") Isto permite que os alunos contatem com estratégias e representações que até essa altura podem não ter considerado.
5. ***Trabalho de grupo: aperfeiçoamento de soluções.*** Os alunos têm uma oportunidade para reverem as abordagens iniciais. Voltam à tarefa e tentam usar ideias para aperfeiçoarem ainda mais as suas resoluções.

6. ***Discussão a nível de toda a turma: uma revisão da aprendizagem.*** O professor organiza uma discussão em plenário para focar os processos envolvidos no problema, tais como as implicações de adotar suposições diferentes, o poder de representações alternativas e as representações matemáticas gerais da estrutura do problema. Tudo isto também poderá acarretar referências adicionais às abordagens incluídas nos exemplos do trabalho dos alunos.



(uma gata pode ter 24 gatinhos; 2000 não é realista)

A **Alice** escolheu representar a tarefa usando um eixo do tempo. Considerou apenas o número de crias da primeira gata. Utilizou corretamente parte da informação disponibilizada, assumindo que nascem seis crias em intervalos regulares. Esqueceu que estas crias também vão ter as suas próprias ninhadas. Não descreveu o seu raciocínio nem os seus pressupostos.



(Mãe;

6 meses;

total dos gatos=1+...; Logo, não é realista)

O **Wayne** assumiu que a mãe tem seis crias depois de seis meses e levou em linha de conta a sucessão de ninhadas. Contudo, esqueceu-se que cada gato pode ter mais do que uma ninhada. Apresentou um eixo do tempo de modo claro. Não explicou de onde veem os intervalos de seis meses.

Figura 14. Amostra de trabalho para discussão, com comentários do professor

A anterior descrição da aula contém muitos recursos que não são comuns no ensino da matemática, pelo menos nos EUA ou no Reino Unido. Existe uma ênfase pronunciada na utilização preliminar da avaliação formativa, o que permite ao professor preparar-se para o que irá encontrar na aula, no que respeita aos raciocínios dos alunos, fornecendo respostas adaptadas. Os alunos passam a maior parte da aula conversando colaborativamente, focados na comparação de processos matemáticos. As sucessivas oportunidades para o aperfeiçoamento da resolução permitem que os alunos utilizem uma multiplicidade de métodos, os quais comparam e avaliam. Finalmente, 'a amostra do trabalho dos alunos' é usada para promover o desenvolvimento da *competência crítica* (4º objetivo). Este aspeto tornou-se o foco da nossa investigação mais recente. Vamos agora apresentar alguns dos problemas que esse facto gera.

DESENVOLVIMENTO DA COMPETÊNCIA CRÍTICA COM AMOSTRA DO TRABALHO DOS ALUNOS

Muitos investigadores têm salientado a importância da comparação de abordagens usadas pelos alunos para as tarefas cognitivamente exigentes, no entanto, tem-se revelado extremamente difícil para os professores colocarem este aspeto em prática. No ambiente complexo da sala de aula, lutam para monitorizar o raciocínio matemático dos alunos, discernir o valor matemático das abordagens alternativas, selecionar resoluções para a discussão em toda a turma e organizar essa discussão para que os alunos construam significados. Os professores têm dificuldade em estabelecer conexões entre as abordagens dos alunos e em reconhecer e valorizar os seus métodos comparando-os com conhecimento válido existente (Brousseau, 1997; Chazan & Ball, 1999; Lampert, 2001; Stein et al, 2008). Na prática, a partilha de ideias degenera muitas vezes em meros 'apresenta e relata', com a participação a ter prioridade sobre a aprendizagem (Stein et al, 2008).

Em resposta a este desafio estamos atualmente a investigar os usos potenciais da preparação anterior à aula de 'amostras do trabalho dos alunos' para discussão em sala de aula, focando conceitos e processos fundamentais, enquanto se desenvolve simultaneamente a competência crítica. Achamos que os exemplos do trabalho dos alunos têm variados usos potenciais. Na resolução de problemas, por exemplo, podem ser usados para encorajar um aluno que está preso numa linha de raciocínio a considerar outras perspetivas, ou para permitir a comparação de representações alternativas e concentrar-se na identificação dos pressupostos de modelação. Na aprendizagem concetual, as amostras podem ser usadas para chamar à atenção a existência de conceções erradas comuns e de interpretações alternativas. A amostra de trabalho precisa de um delineamento cuidado para cada um destes propósitos, de modo a que a atenção dos alunos fique em consonância com as finalidades das aulas. Começamos habitualmente com o trabalho real do aluno que depois é adaptado e reescrito, tornando-o claro, legível e focado na questão que desejamos ver discutida.

A partir de evidência recolhida da observação de mais de 100 professores em, salas de aula, nos EUA, estabelecemos as seguintes diretrizes para a conceção de amostras de trabalho (Evans & Swan, 2014):

- Desencoraje as análises superficiais que os alunos possam fazer, afirmando explicitamente o propósito da amostra de trabalho e fazendo perguntas específicas que se relacionem com esta finalidade:

- Incentive comparações holísticas, construindo amostras de trabalho curtas, acessíveis e claras e excluindo erros processuais, ou outros, que desviam a atenção do objetivo proposto;
- Deixe o trabalho incompleto, de modo a que os alunos tenham de se envolver no raciocínio iniciado para o completar;
- Sequencie a distribuição da amostra do trabalho dos alunos para que possam ser feitas comparações sucessivas entre pares de abordagens semelhantes;
- Dê aos alunos tempo e oportunidades suficientes para incorporarem, nas suas próprias soluções, o que eles aprenderam das amostras de trabalho;
- Providencie apoio aos professores, de forma a que, na discussão a nível de toda a turma, eles possam identificar e extrair critérios para a comparação de abordagens alternativas.

OBSERVAÇÕES FINAIS

Este artigo é uma reflexão pessoal sobre como é que estamos agora a começar a compreender os desafios da conceção de tarefas, depois de muitos anos de realização de investigações sobre este assunto.

O quadro teórico aqui apresentado não pretende ser abrangente, mas tem-se revelado forte, nas mãos de quem concebe tarefas e currículos. Quando se identifica um objetivo a alcançar, o quadro fornece-nos uma forma de identificar o tipo de atividade de sala de aula que pode alcançar esse objetivo, e o nosso corpo de modelos acumulados fornece-nos exemplos, sobre os quais podemos conceber tarefas. É com a utilização deste processo, lento e iterativo, que as tarefas são concebidas e ensaiadas nas aulas, revistas e corrigidas. Esta abordagem, embora normativa no desenvolvimento de produtos em geral, é muito mais dispendiosa do que o "modelo de autoria", tantas vezes usado em educação: produzir um esquema; recolher comentários; rever; publicar. No nosso trabalho, observamos geralmente cada aula entre três e cinco vezes, em cada um dos dois ciclos de desenvolvimento. Isto permite-nos obter um retorno rico e detalhado, ao mesmo tempo que também nos permite distinguir problemas gerais de implementação a partir de mais exemplos de variações idiossincráticas dos professores considerados individualmente. Nós desenvolvemos ferramentas de observação sistemática para recolha de dados (Swan & Burkhardt, 2014) e, no desenvolvimento dos "Desafios da sala de aula", agora temos mais de setecentas destas observações para nosso apoio. Lentamente, estamos a aprender. Talvez que o campo de investigação do projeto esteja ainda na sua fase inicial, mas estamos a fazer progressos.

Referências

Ahmed, A. (1987). *Better Mathematics: A Curriculum Development Study.* London: HMSO

Alexander, R. (2006). *Towards Dialogic Teaching: Rethinking Classroom Talk* (3ed.). Thirsk: Dialogos

Alexander, R. (2008). *How can we be sure that the classroom encourages talk for learning? Here is what research shows.* Cambridge: Dialogos

Bakhtin, M. M. (1981). *The dialogic imagination: Fous essays by M. M. Bakhtin* (C. Emerson & M. Holquist, Trans.): University of Texas Press.

Bassford, D. (1988). *Fractions: A comparison of Teaching Methods.* Unpublished M. Phil, University of Nottingham.

Bell, A. (1993). Some experiments in diagnostic teaching. *Educational Studies in Mathematics, 24*(1).

Bills, C., Bills, L., Mason, J., & Watson, A. (2004). *Thinkers: a collection of mathematical activities to provoque mathematical thinking.* Derby: Association of Teachers of Mathematics.

Birks, D. (1987). *Reflections: a Diagnostic Teaching Experiment.* University of Nottingham.

Black, P., & Harrison, C. (2002). *Working inside the black box: Assessment for learning in the classroom.* London: GL assessement.

Black, P., & Harrison, C, Lee, C., Marshall, B., & William, D. (2003). *Assessment for learning: Putting it into practice.* Buckingham: Open University Press.

Black, P., & William, D. (1998). *Inside the black box:raising standards through classroom assessment.* London: King´s College London School of Education.

Black, P., William, D., & Group A. R. (1999). *Assessment for learning: Beyond the black box.* Cambridge: University of Cambridge Institute of Education.

Brekke, G. (1987). *Graphical Interpretation: a study of pupils´ understanding and some teaching comparisons.* University of Nottingham.

Brousseau, G. (1997). *Theory od Didactical Situations in Mathematics.* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield, Trans. Vol. 19). Dordrecht: Kluwer.

Chazan, D., & Ball, D. L. (1999). Beyond being told not to tell. *For the Learning of Mathematics, 19*(2), 2-10.

Evans, S., & Swan, M. (2014). Developing students´strategies for problem solving: the role of pre-designed "Sample Student Work". *Educational Designer, 2*(7).

Fernandez, C., & Yoshida, M. (2004). *Lesson Study: A Japanese Aproach To Improving Mathematics Taching and Learning.* Mahwah, New Jersey: Laurence Erlbaum Associates.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching.* New Haven, CT: Yale University Press.

Mercer, N. (1995). *The guided construction of knowledge.* Clevedon, Philadelphia, Adelaide.

NGA, & CCSSO (2010). *Common Core State Standards for Mathematics.* Retrieved from http://www.corestandards.org/Math

Onslow, B. (1986). *Overcoming conceptual obstacles concerning rates: Design and Implementation of a diagnostic Teaching Unit.* Unpublished PhD, University of Nottingham.

Schoenfeld, A. (2009). Bridging the cultures of educational research and design. *Educational Designer, 1*(2). Retrieved from http://www.educationaldesigner.org/ed/volume1/issue2/article5/

Shimizu, Y. (1999). Aspects of Mathematical Teacher Education in

Japan: Focusing on Teachers´Roles. *Journal of Mathematics Teacher Education 2*, 107-116

Stein, M. K., Eagle, R. A., Smith, M. A., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

Swan, M. (1983). Teaching Decimal Place Value – a comparative study of ´conflict´ and ´positive only´ approaches. Paper presented at the *7th Conference of International Goup for the Psychology of Mathematics Education*, Jerusalem, Israel.

Swan, M. (2006). *Colaborative Learning in Mathematics: A Challenge to our Beliefs and Practices.* London: National Institute for Advanced and Continuing Education (NIACE) for the National Research and Development Centre for Adult Literacy and Numeracy (NRDC).

Swan, M., & Burkhardt, H. (2014). Lesson Design for Formative Assessment. *Educational Designer, 2*(7).

Trottier, D. (1998). *The screenwriter´s bible*. Los Angeles: Silman-James Press.

Vygotsky, L. (1996). *Thought and Language* (A. Kouzlin, Trans, 9th ed.) Cambridge: Massachusetts Institute of Technology Press.

Watson, A., & Mason, J. (1998). *Questions and prompts for mathematical thinking*. Derby: Association of Teachers of Mathematics.

Malcolm Swan

Centro de investigação em educação matemática, Universidade de Nottingham

Tradução: Fernando Nunes

[1] Tradução da segunda parte da conferência plenária que Malcolm Swan apresentou no Encontro de Investigação em Educação Matemática, realizado em Sesimbra em 2014 e organizado pela Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Números racionais como operadores

Sabemos das dificuldades dos alunos em trabalhar com números racionais em todas as interpretações do conceito, por isso escolhemos alguns problemas que incidem na interpretação do número racional como operador e em diferentes representações (fração e percentagem).

Na interpretação como operador, os números racionais surgem como transformadores de uma situação (operam sobre ela), por exemplo, aumentam ou reduzem o número de itens num conjunto discreto, transformam uma figura geométrica plana noutra da mesma forma, mas com dimensões diferentes (maior ou mais pequena), …Estamos a falar em ampliações, reduções, aumentar, encurtar, multiplicar e dividir.

E compreender os números racionais como operadores implica compreender os efeitos da aplicação sucessiva de dois ou mais operadores, quando o segundo operador é aplicado ao resultado obtido com a aplicação do primeiro operador. Este tipo de composição surge com frequência em situações do dia a dia.

Para os Materiais para a aula de Matemática, deste número da Educação e Matemática, selecionámos do livro *Teaching fractions and ratios for understanding*, de Susan Lamon (2006) um conjunto de sete problemas, que traduzimos e adaptámos. Após a sua resolução os alunos têm um conjunto de questões de reflexão, que poderá dar origem a uma *discussão plenária* (no sentido de Swan, ver texto da seção para este n.º selecionámos) em que se podem colocar questões adicionais para verificar a aprendizagem. .

Isabel Rocha

Manuela Pires

Agrupamento de escolas marinha grande poente